

# یک اثبات و یک تعمیم بر قضیهٔ حمار

مقدمه

اثباتی که در کتاب درسی هندسه ۲ برای «قضیهٔ حمار» ارائه شده، اثباتی ساده و دقیق است. در اینجا می‌خواهیم اثباتی دیگر از این قضیه ارائه دهیم و نیز تعمیمی از آن را معرفی کنیم که کاربردهایی هم در مسائل هندسهٔ نابرابری‌ها دارد و نمونه‌هایی از آن را نیز ذکر می‌کنیم.

اما واضح است که  $BH'' < AB$  و  $CH' < AC$

پس:

$$AB+AC > CH'+BH'' = BC$$

تمرین: در همین شکل نشان دهید:

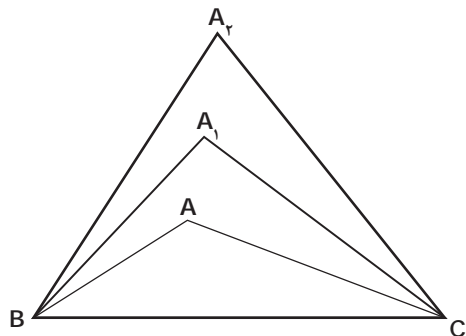
$$AB+BC > AC, AC+BC > AB$$

## تعمیم قضیهٔ حمار

هرگاه چند مثلث، در یک ضلع مشترک باشند و دو ضلع دیگر آن‌ها نقطهٔ برخورد دیگری نداشته باشند و رأس دیگر این مثلث‌ها در یک طرف این ضلع مشترک باشد، مجموع اضلاع مثلثی بزرگ‌تر است که رأس آن از این ضلع مشترک دورتر باشد.

یعنی در شکل زیر داریم:

$$\dots > A_1B+A_1C > A_2B+A_2C > AB+AC$$

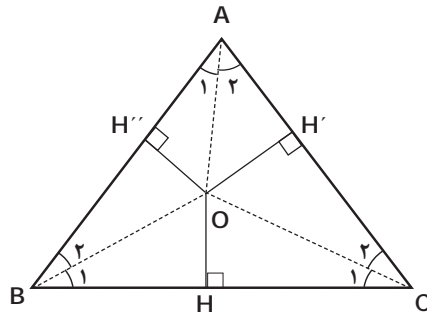


● **اثبات:** کافی است ثابت کنیم:  $A_1B+A_1C > AB+AC$  (چرا؟)

## اثبات قضیهٔ حمار

◆ **قضیهٔ حمار:** در هر مثلث، مجموع اندازه‌های هر دو ضلع، از ضلع سوم مثلث بزرگ‌تر است.

● **اثبات:** پیش از این در قضیه‌ای از کتاب درسی دیده‌ایم که نیم‌سازهای زوایای داخلی هر مثلث، در نقطه‌ای واقع در درون مثلث، هم‌رس‌اند و می‌دانیم هر نقطه روی نیم‌ساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. بنابراین اگر O نقطهٔ هم‌رسی نیم‌سازهای زوایای داخلی مثلث ABC و  $OH'$ ،  $OH''$  و  $OH'''$  فواصل O از سه ضلع مثلث باشند، داریم:



$$OH=OH'=OH''$$

$$\triangle OAH \cong \triangle OAH''$$

$$\triangle COH' \cong \triangle COH$$

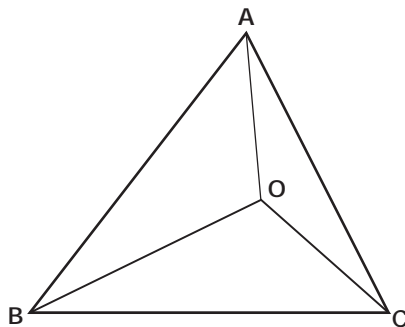
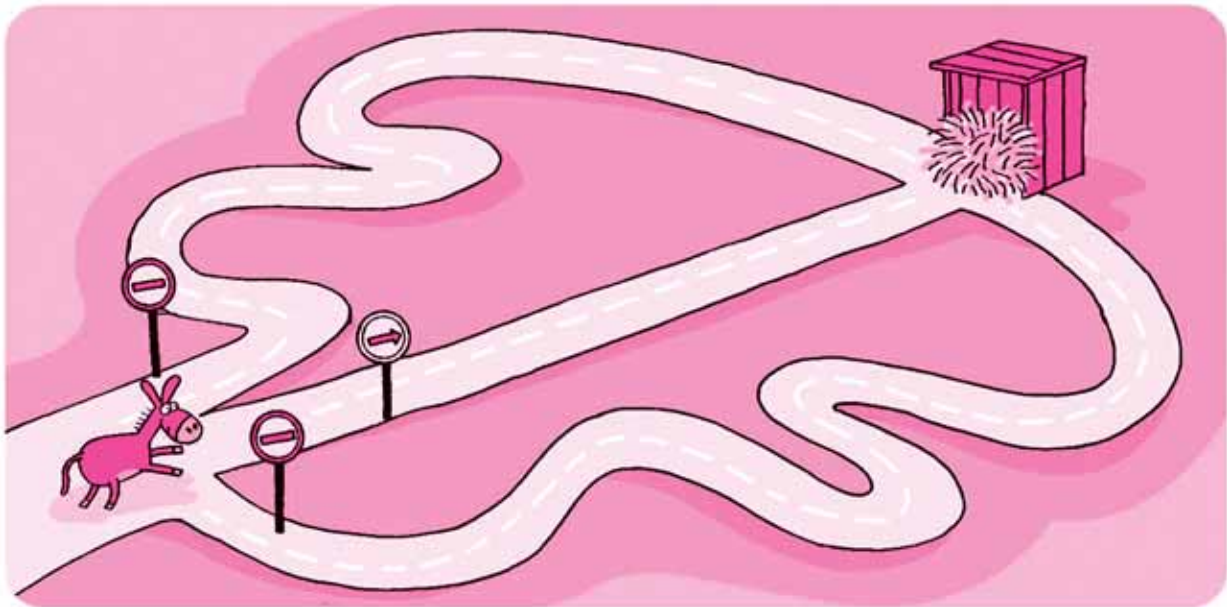
$$\triangle BOH''' \cong \triangle BOH$$

(وتر و یک زاویهٔ حاده)

و بنابراین:

$$AH''=AH', CH'=CH, BH=BH'''$$

$$\Rightarrow CH+BH''=CH+BH=BC$$



◆ **حل:** نقطه دلخواه O را درون مثلث ABC در نظر می‌گیریم. اثبات اینکه  $OA+OB+OC$  از نصف محیط مثلث بزرگ‌تر است، نیازی به تعمیم قضیه حمار ندارد و به کمک خود این قضیه و به سادگی انجام می‌شود:  
 $OB+OC > BC$ ,  $OA+OC > AC$ ,  $OA+OB > AB$   
 اکنون با جمع کردن این نابرابری‌ها می‌توانید به درستی حکم برسید. اما اثبات اینکه این مجموع از محیط مثلث کوچک‌تر است، باید به کمک تعمیم قضیه حمار و به صورت زیر انجام شود:

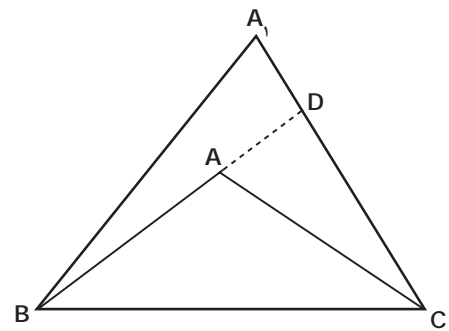
$$\begin{aligned} OB+OC &< AB+AC \\ OA+OB &< AC+BC \\ OA+OC &< AB+BC \end{aligned}$$

و با جمع کردن طرفین این نابرابری‌ها نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} 2(OA+OB+OC) &< 2(AB+AC+BC) \\ \Rightarrow OA+OB+OC &< AB+AC+BC \end{aligned}$$

به این منظور  $AB$  را امتداد می‌دهیم تا  $A_1C$  را در نقطه  $D$  قطع کند. حال به کمک قضیه حمار می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} AD+DC > AC &\Rightarrow AD+DC+AB > AC+AB \\ \Rightarrow DB+DC &> AB+AC \quad (1) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A_1B+A_1D > BD &\Rightarrow A_1B+A_1D+DC > BD+DC \\ \Rightarrow A_1B+A_1C &> BD+DC \quad (2) \end{aligned}$$

و از مقایسه (1) و (2) نتیجه می‌شود:

$$A_1B+A_1C > AB+AC$$

### مثال‌هایی از کاربرد تعمیم قضیه حمار

◆ **مثال ۱.** ثابت کنید در هر مثلث مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث از سه رأس آن، از محیط مثلث کوچک‌تر و از نصف محیط بزرگ‌تر است.

● اسم مجله: Mathematical Spectrum

● تارنما: ms.appliedprobability.org

● ناشر: Applied Probability Trust

● مکان انتشار: دانشگاه شفیلد انگلستان

● زبان: انگلیسی

● سال آغاز انتشار: ۱۹۶۸

● نشانی:

Mathematical Spectrum

Applied Probability

School of Mathematics and Statistics

The University of Sheffield

Sheffield S37RH

● تلفن و فکس:

Telephone Number: +44-(0)114-222-3920

Fax Number: +44-(0)114-222-3920

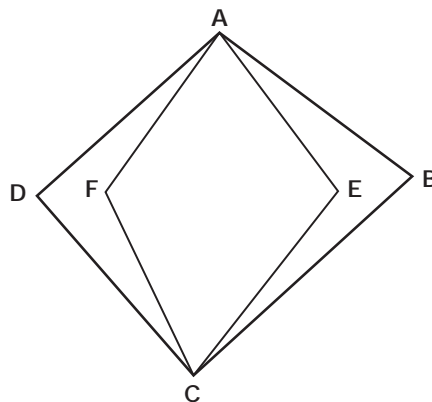


فرانک مورلی  
(۱۸۶۰-۱۹۳۷)

مجله ریاضی «Mathematical Spectrum»

یکی از بهترین و سرشناس‌ترین مجلات ریاضی جهان در عرصه ریاضیات دوره دوم دبیرستان است که در تمام شاخه‌های ریاضی مانند: جبر<sup>۱</sup>، مثلثات<sup>۲</sup>، نظریه اعداد<sup>۳</sup>، ترکیبیات<sup>۴</sup>، هندسه<sup>۵</sup>، آمار<sup>۶</sup>، تاریخ ریاضیات<sup>۷</sup> و... دست به چاپ و انتشار مقاله می‌زند. این مجله از جایگاه برجسته‌ای بین مقاله‌نویسان ریاضی برخوردار

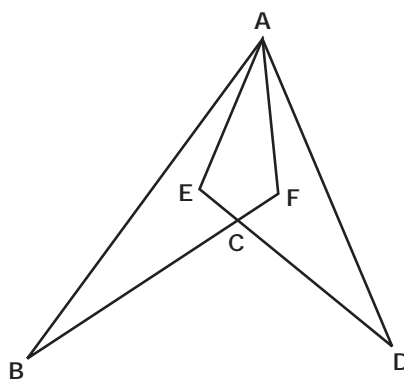
◆ مثال ۲. در شکل زیر ثابت کنید محیط چهارضلعی ABCD از محیط چهارضلعی AECF بزرگ‌تر است.



◆ حل: به کمک تعمیم قضیه حمار در مثلث‌های ABC و ACD داریم:  $AB+BC > AE+EC$  و  $AD+CD > AF+CF$  با جمع کردن طرفین این نابرابری‌ها به‌سادگی می‌توانید درستی حکم را اثبات کنید.

### تمرین

۱. در شکل زیر ثابت کنید:  $AB+AD$  از نصف محیط چهارضلعی AECF بزرگ‌تر است.



۲. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، از نقطه O دلخواه درون مثلث عمودهای OM، ON، و OP را بر اضلاع مثلث وارد کرده‌ایم. ثابت کنید محیط مثلث MNP از ارتفاع مثلث ABC بزرگ‌تر است.